CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A IX - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I
Fie expresia $E(x) = 4 \cdot \{x\}^2 - 4 \cdot \{x\} + 1$, unde x este număr real.

a) Verificaţi dacă numărul $a = 4 \cdot E(-\frac{3}{4}) + 1$ este număr natural prim.

b) Arătaţi că $E(\sqrt{2023} + 1) = E(\sqrt{2023} - 1)$.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $E\left(\frac{2x+5}{4x+2}\right) = 0$.

a)	$\{-\frac{3}{4}\} = \frac{1}{4} \implies a = 2$, prin urmare a este număr natural prim.	**2p**
b)	$\{\sqrt{2023}+1\} = \sqrt{2023}+1-[\sqrt{2023}+1] = \sqrt{2023}+1-[\sqrt{2023}]-1 = \{\sqrt{2023}\}$	**1p**
	$\{\sqrt{2023}-1\} = \sqrt{2023}-1-[\sqrt{2023}-1] = \sqrt{2023}-1-[\sqrt{2023}]+1 = \{\sqrt{2023}\}$	**1p**
	$\implies E(\sqrt{2023}+1) = E(\sqrt{2023}-1)$	
c)	$E\left(\frac{2x+5}{4x+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \left(2\{\frac{2x+5}{4x+2}\} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \{\frac{2x+5}{4x+2}\} = \frac{1}{2}$	**1p**
	$\Leftrightarrow \frac{2x+5}{4x+2} - \left[\frac{2x+5}{4x+2}\right] = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{2x+5}{4x+2}\right] = \frac{2}{2x+1} \in \mathbb{Z}$ şi $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x+1 \in \{\pm1; \pm2\}$.	**1p**
	Se obţin valorile $x = 0$ şi $x = -1$ care verifică ecuaţia.	**1p**

Subiectul II
Se consideră numerele naturale impare consecutive date sub forma următorului tabel, în care linia n conţine n numere:

1				
3	5			
7	9	11		
13	15	17	19	
...	...	...	...	...

a) Calculaţi suma elementelor de pe primele 7 linii.

b) Determinaţi primul şi ultimul element de pe linia n.

c) Stabiliţi pe a câta linie se află numărul 2023.

a)	Pe primele 7 linii sunt 28 de numere, iar suma lor este: $$S = \sum_{k=1}^{k=28}(2k-1) = 28^2$$	**2p**
b)	Pe primele $n-1$ linii sunt $\frac{(n-1)n}{2}$ numere	**1p**
	Primul element de pe linia n este $a_{\frac{(n-1)n}{2}+1} = 2[\frac{(n-1)n}{2}+1]-1 = n^2-n+1$	**1p**
	Ultimul element de pe linia n este $a_{\frac{(n-1)n}{2}+n} = 2[\frac{(n-1)n}{2}+n]-1 = n^2+n-1$	**1p**
c)	Trebuie să aflăm n pentru care are loc: $(n-1)n+1 \leq 2023 \leq n(n+1)-1$	**1p**
	Se obţine $n = 45$	**1p**

Subiectul III

a) Fie a, b, $c \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} = 0$. Arătaţi că ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ are rădăcini reale de semne contrare.

b) Dacă a, $b \geq 4$, atunci cel puţin una din ecuaţiile:

$$x^2+ax+b=0 \quad , \quad x^2+bx+a=0$$

are o rădăcină reală.

a)	$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}=0 \implies ac=-b^2 \implies \Delta = 5b^2 > 0 \implies$ ecuaţia $ax^2+bx+c=0$ are două soluţii reale.	**2p**
	Din relaţiile lui Viete, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{b^2}{a^2} < 0 \implies x_1, x_2$ sunt de semne contrare.	**1p**
b)	Dacă $a > b$, atunci $\Delta_1 = a^2-4b > a^2-4a \geq 0 \implies$ ecuaţia $x^2+ax+b=0$ are cel puţin o rădăcină reală.	**2p**
	Dacă $b > a$, atunci $\Delta_2 = b^2-4a > b^2-4b \geq 0 \implies$ ecuaţia $x^2+bx+a=0$ are cel puţin o rădăcină reală.	**2p**

Subiectul IV

Se consideră triunghiurile ABC şi $A'B'C'$.

a) Dacă M este mijlocul segmentului AB, arătaţi că $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.

b) Demonstraţi că $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC.

c) Arătaţi că dacă centrele de greutate ale celor două triunghiuri coincid, atunci $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

a)	$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \implies \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC})$ $\implies \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$	**2p**
b)	$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} \implies \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$	**1p**
	$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}) \implies \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$	**2p**
c)	$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ (1) $\overrightarrow{OG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'})$ (2)	**2p**
	Din (1) şi (2), rezultă că $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OC'} = \vec{0}$, de unde rezultă concluzia.	**2p**