CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera teoretică: Profilul real - Ştiinţe ale naturii

CLASA A XI - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Se consideră determinantul $d = \begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$, unde $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că $d = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$.

b) Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, cu toate elementele pozitive, astfel încât elementele de pe diagonala principală să fie egale între ele, iar produsul elementelor de pe fiecare linie şi fiecare coloană să fie egal cu 1. Arătaţi că $det(A) \geq 0$.

c) Se consideră punctele $A_n(n, n^2)$, unde $n \in \mathbb{N}$. Arătaţi că pentru orice numere $m,\ n,\ p$ naturale, distincte două câte două, aria $\triangle A_m A_n A_p$ este număr natural.

a)	Se verifică egalitatea.	**2p**
b)	Se deduce că $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, cu $a,\ b,\ c \in (0, +\infty)$ şi $c = \frac{1}{ab}$	**1p**
	Se arată că $det(A) = \frac{1}{2}(a+b+c)\Big[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\Big] \geq 0$	**1p**
c)	$\mathcal{S}_{A_m A_n A_p} = \frac{1}{2}\lvert(n-m)(p-m)(p-n)\rvert$	**2p**
	Oricum am alege paritatea numerelor $m,\ n,\ p$, produsul $(n-m)(p-m)(p-n)$ este număr par $\Rightarrow \mathcal{S}_{A_m A_n A_p} = \frac{1}{2}\lvert 2k\rvert = \lvert k\rvert \in \mathbb{N}$.	**1p**

Subiectul II

Se consideră funcţia $f : \mathbb{R}^* \to \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(x) = Ax$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calculaţi $f^2(x)$ şi $f^3(x)$.

b) Determinaţi $f^{2023}(1)$.

c) Rezolvaţi în mulţimea $\mathbb{R}^*$ ecuaţia:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix}1\\2021\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2023\end{pmatrix}\ , \text{ unde } \begin{pmatrix}2023\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}).$$

a)	$f^2(x) = x^2A^2$ şi $f^3(x) = x^3A^3$, unde $A^2 = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $A^3 = I_3$	**2p**
b)	Se obţine, inductiv, că $f^{2023}(x) = x^{2023}A^{2023}$	**1p**
	$f^{2023}(1) = A^{2023} = (A^3)^{674} \cdot A = I_3 \cdot A = A.$	**2p**
c)	Se obţine $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot f(x) \cdot \begin{pmatrix}1\\2021\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & x & 0\\0 & 0 & x\\x & 0 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2021\\1\end{pmatrix} =$ $(2023x)$	**1p**
	Se obţine $x = 1$.	**1p**

Subiectul III
Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+2mx+n}{x^2+1}$, cu $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Arătaţi că există două puncte ale graficului funcţiei f în care tangenta este paralelă cu axa Ox şi că produsul absciselor celor două puncte este egal cu -1.

b) Determinaţi valorile parametrilor reali m, n ştiind că $f(1) = 2$ şi $f'(2) = 0$.

c) Determinaţi valorile parametrilor reali m, n ştiind că funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} f(x)\ , \ x < m \\ n\ , \ x = m \\ 2n+4\ , \ x > m \end{cases} \qquad \text{este continuă în } x = m.$$

a)	$f'(x) = 2\frac{-mx^2+(1-n)x+m}{(x^2+1)^2}$	**1p**
	$tg \parallel Ox \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -mx^2 + (1-n)x + m = 0$. Cum $\Delta = (1-n)^2 + 4m^2 > 0 \Rightarrow$ ecuaţia are două soluţii reale diferite, iar produsul lor este -1.	**1p**
	Concluzia.	**1p**
b)	$m = 4$ şi $n = -5$	**2p**
c)	Funcţia g este continuă în $x = m \Leftrightarrow g(m-0) = g(m+0) = g(m)$	**1p**
	Se obţine $m = 0$ şi $n = -4$	**1p**

Subiectul IV

Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ şi P un punct care aparţine graficului funcţiei f şi care are abscisa t, $t > \sqrt{2}$. Notăm cu r tangenta la graficul funcţiei f în punctul P.

a) Pentru $t = 2$, arătaţi că r este paralelă cu dreapta de ecuaţie $2x + 8y - 3 = 0$.

b) Exprimaţi în funcţie de t aria S_1 a triunghiului OPA, unde A este punctul de intersecţie al tangentei cu axa Oy.

c) Fie d dreapta perpendiculară pe r în punctul P, punctul B aflat la intersecţia dreptei d cu axa Ox şi S_2 aria triunghiului OPB. Calculaţi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_1}{S_2}$$

.

a)	$r: y - f(t) = f'(t)(x-t)$. Pentru $t=2$, se obţine $r: y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$	**1p**
	$\Leftrightarrow r \parallel 2x + 8y - 3 = 0$.	**1p**
b)	$r \cap Oy: x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{t^2} \Rightarrow A(0, \frac{3}{t^2})$. $S_1 = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & \frac{1}{t^2} & 1 \\ 0 & \frac{3}{t^2} & 1 \end{vmatrix} \right\rvert = \frac{3}{2t}$.	**2p**
c)	$d \perp r \Rightarrow m_d \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_d = -\frac{1}{f'(t)} = \frac{t^3}{2}$.	**1p**
	$d: y - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3}{2}(x-t)$; $d \cap Ox: y = 0 \Rightarrow x = t - \frac{2}{t^5}$	
	$S_2 = \frac{1}{2}\left\lvert \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ t & \frac{1}{t^2} & 1 \\ t - \frac{2}{t^5} & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\rvert = \frac{1}{2}\frac{t^6-2}{t^7}$.	**1p**
	$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_1}{S_2} = 3.$$	**1p**