CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera teoretică: Profilul real - Ştiinţe ale naturii

CLASA A IX - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

a) Să se arate că $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi suma $S_n = \frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiei $[S_{n+1}] = [S_n] + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

a)	Verificare prin calcul	**2p**
b)	Folosind rezultatul de la punctul a), obţinem $S_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.	**3p**
c)	$[S_{n+1}] = [S_n] = 0$	**1p**
	Propoziţia este falsă.	**1p**

Subiectul II

Se consideră expresia:

$$E(x) = 6 \cdot \left\{\frac{x+13}{2x+2}\right\} \cdot \left\{\frac{2x+22}{3x-3}\right\} - 4 \cdot \left\{\frac{x+13}{2x+2}\right\} - 3 \cdot \left\{\frac{2x+22}{3x-3}\right\} + 2.$$

a) Calculaţi $E(-\frac{5}{2})$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $E(x) = 0$.

a)	$E(-\frac{5}{2})=0$	**2p**
b)	$E(x)=\left(2\cdot\left\{\frac{x+13}{2x+2}\right\}-1\right)\cdot\left(3\left\{\frac{2x+22}{3x-3}\right\}-2\right)\Rightarrow\left\{\frac{x+13}{2x+2}\right\}=\frac{1}{2}\vee\left\{\frac{2x+22}{3x-3}\right\}=\frac{2}{3}$	**2p**
	$\left[\frac{x+13}{2x+12}\right]=\frac{6}{x+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+1\in\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm6\}$	**1p**
	$\left[\frac{2x+22}{3x-3}\right]=\frac{8}{x-1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x-1\in\{\pm1;\pm2;\pm4;\pm8\}$	**1p**
	Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este $S=\{-7;-3;-1;0;2;3;5;9\}$	**1p**

Subiectul III
Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1>0$ şi $r>0$. Notăm cu S_n suma primilor n termeni ai progresiei aritmetice.

a) Folosind, eventual, metoda inducţiei matematice, demonstraţi egalitatea:

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1a_n},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq2.$$

b) Dacă există două numere naturale k şi l nenule şi diferite între ele pentru care $S_k=S_l$, atunci calculaţi S_{k+l}.

c) Calculaţi suma $S=S_1+S_2+\cdots+S_{2023}$ în funcţie de a_1 şi r.

a)	Demonstrarea egalităţii.	**2p**
b)	$S_k=S_l\Rightarrow(k-l)(2a_1+(k+l-1)r)=0$	**1p**
	Dar $k\neq l\Rightarrow 2a_1+(k+l-1)r=0$, ceea ce conduce la $S_{k+l}=0$.	**1p**
c)	$S=\frac{2a_1}{2}+\frac{2a_1+r}{2}+\frac{2a_1+2r}{2}+\cdots+\frac{2a_1+2022r}{2}$	**1p**
	$S=\frac{2023}{2a_1+1011r}$	**2p**

Subiectul IV
Pe latura BC a triunghiului ABC se consideră un punct D astfel încât $\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$. Se notează cu E mijlocul segmentului AB, iar cu F mijlocul medianei din C.

a) Calculaţi vectorii $\overrightarrow{AD}$ csi $\overrightarrow{AF}$ în funcţie de vectorii $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AC}$.

b) Arătaţi că punctele A, F, D sunt coliniare.

a)	$\frac{BD}{DC} = k = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AC}$, adică $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.	**2p**
	AF mediană în triunghiul $AEC \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$	**2p**
	Realizarea corectă a figurii.	**1p**
b)	$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$, de unde rezultă că vectorii $\overrightarrow{AF}$ şi $\overrightarrow{AD}$ sunt coliniari, ceea ce implică faptul că punctele A, F, D sunt coliniare.	**2p**