CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A X - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

a) Determinaţi mulţimea $M = \{x \in \mathbb{R} \big| log_2(2^x - 1) < log_{\frac{1}{2}} \frac{2^x-1}{9}\}$.

b) Rezolvaţi în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul:

$$\begin{cases} 2^{\frac{x-y}{2}} - 2^{\frac{x-y}{4}} = 2 \\ 3^{lg(2y-x)} = 1 \end{cases} .$$

c) Fie a, $b \in \mathbb{R}$, cu $a > b > 0$ şi $a^2 + b^2 = 23ab$. Arătaţi că:

$$ln\frac{1}{5}(a+b) = ln\frac{1}{\sqrt{21}}(a-b) = \frac{1}{2}(lna + lnb)$$

a)	Inecuaţia $\log_2(2^x - 1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{2^x-1}{9}$ este echivalentă cu $\log_2\left(\frac{2^x-1}{3}\right)^2 < 0$ $\Rightarrow 0 < \frac{2^x-1}{3} < 1 \Rightarrow 1 < 2^x < 4 \Rightarrow M = (0; 2)$	**1p** **1p**
b)	Din prima inecuaţie a sistemului $\Rightarrow \left(2^{\frac{x-y}{4}}\right)^2 - 2^{\frac{x-y}{4}} - 2 = 0$ Cu notaţia $t = 2^{\frac{x-y}{4}}$, ecuaţia devine $t^2 - t - 2 = 0$, cu soluţiile $t = -1$ şi $t = 2$ Din $t = 2 \Rightarrow x - y = 4$, iar din a doua ecuaţie a sistemului avem $2x - y = 1$, soluţia finală fiind $S = \{x = 9; y = 5\}$	**1p** **1p** **1p**
c)	$a^2 + b^2 = 23ab \implies (a+b)^2 = 25ab$ şi $(a-b)^2 = 21ab$ $\ln\frac{1}{5}(a+b) = \ln\frac{1}{5}\sqrt{25ab} = \ln\sqrt{ab}$ $\ln\frac{1}{\sqrt{21}}(a-b) = \ln\frac{1}{\sqrt{21}}\sqrt{21ab} = \ln\sqrt{ab}$ $\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$	**1p** **1p**

Subiectul II
Se consideră funcţia $f : (1; +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{\log_x 3 \cdot \log_x 9} + \cdots + \frac{1}{\log_x 3^{2023} \cdot \log_x 3^{2024}}$$

a) Arătaţi că $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi $f(3)$.

c) Arătaţi că funcţia dată este injectivă, dar nu este surjectivă.

a)	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} \forall n \in \mathbb{N}^*$.	**1p**
b)	$f(x) = \frac{1}{(\log_x 3)^2}\left(\frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{2023\cdot 2024}\right) = \frac{1}{(\log_x 3)^2}\left(1 - \frac{1}{2024}\right) = \frac{1}{(\log_x 3)^2}\frac{2023}{2024}$ $f(3) = \frac{2023}{2024}$	**2p** **1p**
c)	Fie $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (\log_{x_1} 3)^2 = (\log_{x_2} 3)^2 \Rightarrow x_1 = x_2$, adică funcţia f este funcţie injectivă. Funcţia f este o funcţie strict pozitivă, prin urmare $Imf \neq \mathbb{R}$, aşadar funcţia f nu este surjectivă.	**1p** **1p**

Subiectul III
Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to (0; +\infty)$, $f(x) = 3^x$.

a) Arătaţi că $f(0) + f(-1) + \cdots + f(-100) < \frac{1}{2}f(1)$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $f(2\sqrt{x}) + 3 = 4f(\sqrt{x})$.

c) Demonstraţi că pentru orice numere reale a, b, cu $a > b$ are loc relaţia:

$$af(a) + bf(b) \geq bf(a) + af(b).$$

a)	$f(0) + f(-1) + f(-2) + \cdots + f(-100) = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{100}} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{100}}\right)$ $\frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^{100}}\right) < \frac{1}{2}f(1) \implies 3 - \frac{1}{3^{100}} < 3$ (Adev.)	**2p** **1p**
b)	Prin înlocuire, ecuaţia devine $3^{2\sqrt{x}} + 3 = 4 \cdot 3^{\sqrt{x}}$. Notăm $y = 3^{\sqrt{x}}$, de unde rezultă ecuaţia $t^2 - 4t + 3 = 0$, cu soluţiile $t_1 = 1$ şi $t_2 = 3 \implies x_1 = 0$ şi $x_2 = 1$.	**2p**
c)	Înlocuind $f(a)$ ş $f(b)$, inecuaţia devine: $a \cdot 3^a + b \cdot 3^b > b \cdot 3^a + a \cdot 3^b \Big\vert : 3^b$ $\implies (a-b) \cdot 3^{a-b} > a - b \Big\vert : (a-b) > 0 \implies 3^{a-b} > 1 \implies a - b > 0$ (adev.)	 **2p**

Subiectul IV

Fie z_1, z_2, $z_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $z_1 + z_2 + z_3 = 1$.

a) Arătaţi că $\bar{z_1} = \frac{1}{z_1}$, $\bar{z_2} = \frac{1}{z_2}$, $\bar{z_3} = \frac{1}{z_3}$ şi că $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1$.

b) Calculaţi $\frac{1}{z_1^{2023}} + \frac{1}{z_2^{2023}} + \frac{1}{z_3^{2023}}$.

c) Arătaţi că numărul $z = \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1 z_2 z_3}$ este număr real.

a)	$\lvert z_i\rvert^2 = 1 \Leftrightarrow z_i \cdot \bar{z}_i = 1 \Leftrightarrow \bar{z}_i = \frac{1}{z_i}, \forall z_i \in \overline{1,3}$	**1p**
	$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3 = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = \bar{1} = 1$	**1p**
b)	$(z_1 + z_2 + z_3)\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = 1 \Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)(z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2) = z_1 z_2 z_3$	**1p**
	$\Rightarrow (z_1 + z_2)(z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2 + z_3^2) = 0 \Rightarrow (z_1 + z_2)(z_1 + z_3)(z_2 + z_3) = 0.$	**1p**
	Dacă $z_1 + z_2 = 0 \implies z_3 = 1$ şi $\frac{1}{z_1^{2023}} + \frac{1}{z_2^{2023}} + \frac{1}{z_3^{2023}} = 1$	**1p**
	Analog dacă $z_1 + z_3 = 0$ sau $z_2 + z_3 = 0$.	
c)	$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$	**1p**
	$\bar{z} = \frac{\overline{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)}}{\overline{z_1 z_2 z_3}} = \frac{(\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)(\bar{z}_3 + \bar{z}_1)}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3} =$ $\frac{\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)\left(\frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right)\left(\frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1}\right)}{\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3}} = z$	**1p**