CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera teoretică: Profilul real - Ştiinţe ale naturii

CLASA A X - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

a) Arătaţi că $\{\log_3 54\} - \{\log_3 18\}$ este număr natural, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului a.

b) Arătaţi că $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 6$.

c) Calculaţi $\log_6 16$ în funcţie de $a = \log_{12} 3$.

a)	$\log_3 54 = \log_3 27 + \log_3 2 = 3 + \log_3 2$; $\log_3 18 = \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$	**1p**
	$0 < \log_3 2 < 1 \Rightarrow \{\log_3 54\} - \{\log_3 18\} = 0$	**1p**
b)	$45 + 29\sqrt{2} = (3+\sqrt{2})^3$ şi $45 - 29\sqrt{2} = (3-\sqrt{2})^3$	**2p**
	$\Rightarrow \sqrt[3]{45+29\sqrt{2}} + \sqrt[3]{45-29\sqrt{2}} = 3 + \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 6$	**1p**
c)	$\log_6 16 = \frac{\log_{12} 144 - \log_{12} 9}{\frac{1}{2}\log_{12} 36}$	**1p**
	Se obţine $\log_6 16 = \frac{4(1-a)}{1+a}$	**1p**

Subiectul II
Se consideră funcţia $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_{\sqrt{3}-1}(7 - 2\sqrt{x} - x)$.

a) Determinaţi domeniul de definiţie al funcţiei.

b) Determinaţi punctul de pe graficul funcţiei care are ambele coordonate numere naturale.

c) Rezolvaţi ecuaţia $f(x) = 0$.

a)	Condiţiile de existenţă sunt: $7 - 2\sqrt{x} - x > 0$ şi $x \geq 0$	**1p**
	$D = [0; 9 - 4\sqrt{2}]$	**2p**
b)	Numerele naturale din D sunt $\{0, 1, 2, 3\}$.	**1p**
	Prin verificări, se obţine punctul $A(3, 2)$	**1p**
c)	Se obţine ecuaţia $2\sqrt{x} = 6 - x$	**1p**
	Soluţiile ecuaţiei sunt: $x_{1,2} = 8 \pm 2\sqrt{7}$, $x_1 = 8 - 2\sqrt{7}$ convine.	**1p**

Subiectul III

a) Rezolvaţi ecuaţia: $5^{1+2x} + 6^{1+x} = 30 + 150^x$.

b) Rezolvaţi ecuaţia: $\sqrt[3]{(2-x)^2} + \sqrt[3]{(7+x)^2} = \sqrt[3]{(2-x)(7+x)} + 3$.

a)	$5 \cdot 25^x + 6 \cdot 6^x - 6^x \cdot 25^x - 30 = 0 \Rightarrow (25^x - 6)(5 - 6^x) = 0$	**2p**
	$x_1 = \log_{25} 6$, $x_2 = \log_6 5$	**1p**
b)	Notăm $\sqrt[3]{2-x} = a$ şi $\sqrt[3]{7+x} = b$. Se obţin ecuaţiile $a^3 + b^3 = 9$ şi $a^2 + b^2 - ab = 3$	**1p**
	Prin rezolvarea sistemului se obţine: $$\{a_1 = 2; b_1 = 1\} \text{ şi } \{a_2 = 1; b_2 = 2\}$$	**2p**
	Revenind la notaţii, se obţin soluţiile: $x_1 = -6$ şi $x_2 = 1$	**1p**

Subiectul IV
Se consideră mulţimea $A \subset \mathbb{C}$, împreună cu următoarele proprietăţi:

(I) $i \in A$

(II) Dacă $z \in A$, atunci $1 + z^2 \in A$

(III) Dacă $1 + z \in A$, atunci $z \in A$.

a) Arătaţi că $1-2i \in A$ şi $5 \in A$.

b) Se consideră mulţimea $M_n = \{z \in \mathbb{C} \big| z^n = \bar{z}^2\}$. Determinaţi elementele mulţimii M_1 şi arătaţi că mulţimea M_2 are o infinitate de elemente.

a)	$i \in A \overset{(III)}{\Longrightarrow} -1+i \in A \overset{(II)}{\Longrightarrow} 1+(-1+i)^2 \in A \Longrightarrow 1-2i \in A$	**2p**
	$i \in A \overset{(II)}{\Longrightarrow} 1+i^2 = 0 \in A \overset{(III)}{\Longrightarrow} -1 \in A \overset{(III)}{\Longrightarrow} 1+1 = 2 \in A \overset{(II)}{\Longrightarrow} 1+4 = 5 \in A$	**1p**
b)	Se rezolvă ecuaţia $z = \bar{z}^2$ şi se obţine $M_1 = \{0; 1; -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\}$	**2p**
	Ecuaţia $z^2 = \bar{z}^2$ are o infinitate de soluţii de forma $z = bi$, $z = a$, unde $a, b \in \mathbb{R}$	**2p**