CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
”SPIRU HARET”
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XII - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I
Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale se consideră legea de compoziţie ” $*$ ” definită prin:

$$x * y = xy - 3(x+y) + 12, \text{ oricare ar fi } x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Arătaţi că mulţimea $M = (2,4)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea ” $*$ ”.

b) Arătaţi că $26 < xyz - 3(xy + yz + zx) + 9(x + y + z) < 28$, $\forall x, y, z \in (2,4)$.

c) Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia: $\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de 2023 de ori}} = x$

a)	$x * y = xy - 3x - 3y + 9 + 3 = (x-3)(y-3) + 3 \in (2,4)$, $\forall x, y \in (2,4) \Rightarrow M$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea ”*”.	**2p**
b)	$(x * y) * z = xyz - 3(xy + xz + yz) + 9(x + y + z) - 24$	**1p**
	Din a) avem $(x * y) * z \in (2,4)$, $\forall x,\ y,\ z \in (2,4) \Rightarrow 26 < xyz - 3(xy + xz + yz) + 9(x + y + z) < 28$, $\forall x, y, z \in (2,4)$.	**2p**
c)	$\underbrace{x * x * \cdots * x}_{\text{de 2023 de ori}} = (x-3)^{2023} + 3$, de unde ecuaţia devine $(x-3)^{2023} = x - 3$	**2p**
	cu soluţiile $x_1 = 3$ şi $x_2 = 4$	**1p**

Subiectul II

Fie polinomul $f = X^3 - 3X + m$, unde $m \in \mathbb{R}$ şi x_1, x_2, x_3 rădăcinile sale.

a) Pentru $m = 2$, determinaţi rădăcinile polinomului f.

b) Arătaţi că pentru orice $m \in \mathbb{R}$, $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 - 18 = 0$.

c) Determinaţi valorile lui $m \in \mathbb{R}$ pentru care f are toate rădăcinile întregi.

a)	Pentru $m = 2$, polinomul este $f = X^3 - 3X + 2$. Numărul α este rădăcină a plimomului $f \Leftrightarrow f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha - 2) = 0$. Se obţin $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ şi $\alpha_3 = -2$.	**2p**
b)	x_i rădăcină a polinomului $f \implies x_i^3 - 3x_i + m = 0, \forall i \in \overline{1,3}$	**1p**
	$\implies x_i^4 - 3x_i^2 + mx_i = 0, \forall i \in \overline{1,3} \implies \sum x_i^4 - 3\sum x_i^2 + m\sum x_i = 0.$	**1p**
	Din relaţiile lui Viete, urmează concluzia.	**1p**
c)	Din relaţiile lui Viete, avem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1x_2x_3 = m$ şi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 6$.	**2p**
	$x_i \in \mathbb{Z} \implies x_i \in \{\pm 1, \pm 2\}$, de unde obţinem $m = \pm 2$.	

Subiectul III

Se consideră funcţia $f : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\ln^2 x$.

a) Determinaţi primitiva funcţiei f al cărei grafic are în punctul de abscisă $x_0 = e$ tangenta $y = ex$.

b) Se consideră funcţia $g : (0; +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 \ln x}$. Aflaţi numărul real $a > e$ pentru care aria subgraficului delimitat de dreptele $x = e$, $x = a$ şi graficul funcţiei g este $\frac{3}{2}$.

c) Calculaţi:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx$$

a)	$\int x\ln^2 x dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + \mathcal{C}$. Notăm $F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + C$ o primitivă a funcţiei f. Ecuaţia tangentei la graficul funcţiei F în punctul de abscisă $x_0 = e$ este: $y - F(e) = f(e)(x-e)$, unde $F(e) = \frac{e^2}{4} + C$ şi $f(e) = e$. Înlocuind în ecuaţia tangentei, obţinem: $y = ex - \frac{3e^2}{4} + C$, de unde obţinem $C = \frac{3e^2}{4}$, iar primitiva căutată este: $$F(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2}\right) + \frac{3e^2}{4}$$	**1p** **1p**
b)	$$\mathcal{A} = \int_e^a g(x)dx = \int_e^a \frac{\ln x}{x}dx = \frac{\ln^2 x}{2}\Big\|_e^a = \frac{\ln^2 a - 1}{2}$$ $$\mathcal{A} = \frac{3}{2} \implies \ln^2 a = 4 \text{ şi cum } a > e \implies a = e^2$$	**1p** **1p**
c)	$$\int_1^e \frac{\ln x}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^e \frac{1+\ln x - 1}{x(1+\ln x)}dx = \int_1^e \frac{1}{x}dx - \int_1^e \frac{1}{x(1+\ln x)} =$$ $$\ln x\Big\|_1^e - \ln(1+\ln x)\Big\|_1^e = \ln e - \ln 2 = \ln\frac{e}{2}$$	**2p** **1p**

Subiectul IV Se consideră funcţia $f : [0,1] \to [0,+\infty)$ continuă cu proprietatea că $f(x) = f(1-x)$, $\forall x \in [0,1]$. Arătaţi că:

a) $\int_0^1 \frac{x+f(x)}{1+2f(x)}dx = \frac{1}{2}$.

b) $\int_0^1 \frac{2x-1}{1+2f(x)}dx = 0$.

a)	Cu schimbarea de variabilă u=1-x, obţinem: $$I = -\int_1^0 \frac{1-u+f(1-u)}{1+2f(1-u)}du = \int_0^1 \frac{1-u+f(u)}{1+2f(u)}du$$	**2p**
	$$I = \int_0^1 \frac{1+2f(u)-u-f(u)}{1+2f(u)}du = \int_0^1 1du - I \Rightarrow 2I = 1 \Rightarrow I = \frac{1}{2}$$	**2p**
b)	$$J = \int_0^1 \frac{2x-1}{1+2f(x)}dx = \int_0^1 \frac{2(1-u)-1}{1+2f(1-u)}du = \int_0^1 \frac{1-2u}{1+2f(u)}du = -J$$	**2p**
	$$\Longrightarrow 2J = 0 \Longrightarrow J = 0$$	**1p**