CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ
"SPIRU HARET"
EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera tehnologică: profilurile tehnic, servicii, resurse naturale şi protecţia mediului

CLASA A XI - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X(a) = I_2 + aA \big| a \in \mathbb{R}\}$.

a) Arătaţi că, oricare ar fi a, $b \in \mathbb{R}$, $X(a) \cdot X(0) = X(a)$ şi $X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 10ab)$.

b) Fie $H = \{X(a) \big| a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{10}\}\}$. Arătaţi că dacă $X(a)$, $X(b) \in H$,atunci $X(a) \cdot X(b) \in H$.

c) Rezolvaţi ecuaţia: $X^2 = I_2$, unde $X \in G$.

a)	$X(a) \cdot X(0) = (I_2 + aA)I_2 = I_2 + aA = X(a)$	**1p**
	$X(a) \cdot X(b) = (I_2 + aA)(I_2 + bA) = I_2 + bA + aA + abA^2 = I_2 + (b + a - ab)A = X(a + b - 10ab)$	**1p**
b)	$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{10}\} \Rightarrow a + b - 10ab \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{10}\} \Rightarrow X(a) \cdot X(b) = X(a + b - 10ab) \in H$	**2p**
c)	$X^2 = (I_2 + aA)(I_2 + aA) = I_2 + (2a - 10a^2)A$	**1p**
	$X^2 = I_2 \Rightarrow 2a(1 - 5a) = 0 \Rightarrow a = 0$ sau $a = \frac{1}{5}$	**2p**

Subiectul II

Se consideră triunghiul ABC, cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ şi sistemul

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}.$$

a) Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

b) Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluţie unică.

c) Ştiind că soluţia sistemului este (x_0, y_0, z_0), să se demonstreze că x_0, y_0, $z_0 \in (-1, 1)$.

a)	Pentru $a=3$, $b=4$, $c=5 \Rightarrow \Delta=-120$, $\Delta_x=-96$, $\Delta_y=-72$, $\Delta_z=0$ $\Rightarrow S=\{x=\frac{4}{5}; y=\frac{3}{5}; z=0\}$	**1p** **1p**
b)	Determinatul sistemului este $\Delta=-2abc \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are soluţie unică.	**2p**
c)	Aplicând metoda lui Cramer, se obţine $x_0=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y_0=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z_0=\frac{b^2+a^2-c^2}{2ba}$. Din teorema cosinusului, avem că $x_0=\cos A$, $y_0=\cos B$, $z_0=\cos C \Rightarrow x_0$, y_0, $z_0 \in (-1,1)$.	**2p** **1p**

Subiectul III
Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+ax+b}{x-1}$, unde a, $b\in\mathbb{R}$.

a) Să se determine a şi b ştiind că $P(0,1)$ aparţine graficului funcţiei f şi că tangenta la graficul funcţiei f în punctul P este paralelă cu axa Ox.

b) Pentru $a=1$ şi $b=-1$, determinaţi aria dreptunghiului format de tangenta la grafic în punctul de abscisă $x=2$, asimptota verticală a funcţiei şi axele de coordonate.

a)	Rezolvăm sistemul $\begin{cases} f(0)=1 \\ f'(0)=0 \end{cases}$ şi obţinem $a=1$ şi $b=-1$	**3p**
b)	Ecuaţia tangentei în punctul de abscisă $x=2$ este $y=5$ Asimptota verticală a funcţiei este dreapta $x=1$. Aria dreptungiului format de axe, tangentă şi asimptota verticală este 5.	**1p** **1p** **2p**

Subiectul IV
Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

a) Calculaţi
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^3(x)}{(x^2+1)f(x)}.$$

b) Determinaţi asimptota oblică a graficului funcţiei f spre $+\infty$.

c) Determinaţi $m\in\mathbb{R}$ pentru care $f^2(x)\cdot f'(x)=x^2+mx$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$.

a)	$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^3(x)}{(x^2+1)f(x)}=1$$	**2p**
b)	$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}}{x}=1$$	**1p**
	$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2-4}-x)=1$$	**1p**
	$\Rightarrow y=x+1$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcţiei f	**1p**
c)	$$f'(x)=\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2-4)^2}}$$	**1p**
	$$f^2(x)\cdot f'(x)=\sqrt[3]{(x^3+3x^2-4)^2}\cdot\frac{x(x+2)}{\sqrt[3]{(x^3+3x^2-4)^2}}=x^2+2x\Rightarrow m=2.$$	**1p**