CONCURSUL INTERJUDEŢEAN DE MATEMATICĂ "SPIRU HARET" EDIŢIA A XXII-A, 20 MAI 2023

Filiera teoretică: Profilul real - Ştiinţe ale naturii

CLASA A XII - A

BAREM DE CORECTARE

Subiectul I

Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ şi mulţimea $G = \{X_a = I_2 + aA\ ,\ a > -1\}$.

a) Arătaţi că $(G, \cdot)$ este grup abelian.

b) Demonstraţi că funcţia $f : G \to \mathbb{R}$, $f(X_a) = \ln(a+1)$ este izomorfism de la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}, \cdot)$.

c) Arătaţi că $X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n = X_{(n+1)!-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

a)	Fie X_a, X_b două elemente oarecare din G. Atunci $\exists a > -1$, $\exists b > -1$ astfel încât $X_a = I_2 + aA$ şi $X(b) = I_2 + bA$. $X(a) \cdot X(b) = I_2 + (a+b)A + abA^2 = I_2 + (a+b+ab)A = X_{a+b+ab}$, unde $a + b + ab > -1 \Rightarrow X(a) \cdot X(b) \in G$, adică G este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulţirea matricelor. Înmulţirea în G este asociativă, comutativă şi $I_2 = X_0$ este element neutru. Fie $X_a \in G$ şi $X_{a'} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X_a \cdot X_{a'} = I_2 \Rightarrow X_{a+a'+aa'} = X_0 \Rightarrow a + a' + aa' = 0 \Rightarrow a' = -\frac{a}{a+1} > -1$, pentru $a > -1$, rezultă că $X_{\frac{-a}{a+1}} \in G$. Prin urmare, orice element din G este simetrizabil în raport cu înmulţirea. Ca urmare a celor stabilite anterior, $(G, \cdot)$ este grup abelian.	**1p** **2p**
b)	Fie $X(a)$, $X(b) \in G$ astfel încât $f(X_a) = f(X_b) \Rightarrow \ln(a+1) = \ln(b+1) \Rightarrow X_a = X_b \Rightarrow f$ este injectivă. $f(X_a) = y \Rightarrow \ln(a+1) = y \Rightarrow a = e^y - 1 > -1 \Rightarrow \forall y \in \mathbb{R}, \exists X_a \in G$ astfel încât $f(X_a) = y \Rightarrow f$ este surjectivă. În concluzie, f este izomorfism de la grupul $(G, \cdot)$ la grupul $(\mathbb{R}, \cdot)$.	**1p** **1p**
c)	$f(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = f(X_1) + f(X_2) + \dots + f(X_n) = \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n+1) = \ln(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n+1)) = \ln(n+1)! = f(X_{(n+1)!-1}) \implies X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n = X_{(n+1)!-1)}$ (f injectivă)	**2p**

Subiectul II

Să se determine primitivele funcţiilor:

a) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R})$, $f(x) = \frac{1}{x(x^{2023}+1)}$.

b) $f : (0, \pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+\sin x}{1+\cos x} e^x$.

c) $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

a)	$$\int f(x)dx=-\frac{1}{2023}\int\frac{-2023}{x^{2024}\cdot\left(1+\frac{1}{x^{2023}}\right)}dx=-\frac{1}{2023}\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x^{2023}}\right)+\mathcal{C}$$	**2p**
b)	$$\int f(x)dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}e^x dx=$$ $$\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x}{1+\cos x}(e^x)'dx=$$ $$\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}-\int\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'e^x dx=$$ $$\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}-\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx=\frac{e^x\sin x}{1+\cos x}+\mathcal{C}$$	**3p**
c)	$$\int f(x)dx=-\int\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)'dx=-\int\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}dt=$$ $$-\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt+\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt=-\arcsin t-\int(\sqrt{1-t^2})'dt=$$ $$-\arcsin t-\sqrt{1-t^2}+\mathcal{C}=-\arcsin\frac{1}{x}-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}+\mathcal{C}$$	**2p**

Subiectul III

Fie $f = X^3 - X + 1$, $g = X^5 - 5X^4 + X^3 + 15X^2 - 3X - 9$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$

a) Dacă x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile lui f, să se calculeze $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$.

b) Să se determine rădăcinile lui g.

a)	Din relaţiile lui Viete avem $g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = -5 - 5 \cdot 5 + (-3) + 15 \cdot 2 - 3 \cdot 0 - 9 = -15$.	**3p**
b)	$g(x) = (x-1)(x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 12x + 9)$	**2p**
	$x_1 = 1$; $\left(x - \frac{3}{x}\right)^2 - 4\left(x - \frac{3}{x}\right) + 3 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$; $x_{4,5} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$	**2p**

Subiectul IV

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, se consideră funcţia $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1 - x)^n$.

a) Să se calculeze $\int_0^1 f_3(x)dx$.

b) Să se arate că $\int_0^1 x f_n(x)dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

c) Să se calculeze $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx$.

a)	$$\int_0^1 (1-x)^3 dx = \int_0^1 u^3 du = \frac{u^4}{4}\Big\|_0^1 = \frac{1}{4}$$	**2p**
b)	Cu substituţia $1 - x = t$, se obţine: $$\int_0^1 x f_n(x)dx = \int_0^1 (1-t) \cdot t^n dt = \left(\frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^n + 2}{n+2}\right)\Big\|_0^1 = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$	**2p**
c)	$$\int_0^1 f_n(\frac{x}{n})dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = -\frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n+1}\Big\|_0^1 =$$ $$-\frac{n}{n+1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right)dx = -1 \cdot e^{-1} + 1 = 1 - \frac{1}{e}.$$	**2p** **1p**